令和３年度　生産システム科学部　一般選抜（前期日程）　数学試験問題
出題意図と解答の指針

作題時における出題の意図と想定した解答の方針は以下のとおりだが、採点においてはこれ以外の方針に基づく解答もこれと同様に等しく考慮される。また、最終結果に至るまでの計算、推論も重視される。

1 出題意図：指数法則と 2 次関数の性質についての理解と基本的な応用力をみる問題である。

指針：$3^x = t$ とおけば、y は t に関する 2 次関数 $y = 9t^2 - 9t + 5$ となり、有界区間 $[1/3, 9]$ 上のこの関数の最大最小問題と考えることが出来る：

y は $x = -\log 2/\log 3$ $(t = 1/2)$ において最小値 $11/4$ を、

$x = 2$ $(t = 9)$ において最大値 653 をとる。

2 出題意図：不定方程式を通して、整数の性質の理解を確かめる問題である。

指針：(1) では　$3 \cdot (-2) - 7 \cdot (-1) = 1 \quad \cdots (*)$　を $3x - 7y = 1$ から引いて $3(x+2) - 7(y+1) = 0$. 3 と 7 は互いに素なので、すべての整数解は $x + 2 = 7n,\ y + 1 = 3n\ (n \in \mathbb{Z})$ と表すことが出来る。$n = 1$ が求める答に対応する：$x = 5,\ y = 2$.

(2) においては、$(*)$ の 11 倍を $3x - 7y = 11$ から引いて (1) と同様にすれば、すべての整数解 $x = 7n - 22,\ y = 3n - 11\ (n \in \mathbb{Z})$ が得られる。

尚、$\mathbb{Z}$ は整数全体の集合を表す。

3 出題意図：微分積分の分数関数などの基本的な関数への適用と、接線や面積への応用力をみる問題である。

指針：　(1) 条件

$$\alpha > \frac{1}{2},\ \beta = \frac{1}{2\alpha - 1} \qquad (\text{P は } C \text{ 上にある }),$$

$$\beta = a - \alpha^2 \qquad (\text{P は } D \text{ 上にある }),$$

$$\frac{-2}{(2\alpha - 1)^2} = -2\alpha \qquad (\text{P における } C \text{ と } D \text{ の共通接線の傾き } **)$$

を連立させて解くと

$$\alpha = \beta = 1, \quad a = 2$$

が得られる。また共通接線は、$(\alpha, \beta) = (1, 1)$ を通り傾きが -2 (** 参照) なので、方程式は $y = -2x + 3$ となる。

(2) $x_0 = 3/2$ であり、D と x 軸の正の部分との交点の x 座標は $\sqrt{2}$ なので、求める面積は

$$\int_1^{3/2} \frac{1}{2x - 1}\, dx - \int_1^{\sqrt{2}} (2 - x^2)\, dx = \frac{\log 2}{2} + \frac{5 - 4\sqrt{2}}{3}$$

となる。

$\boxed{4}$　出題意図：漸化式によって定義された数列や数列の和の公式、対数法則、数列の極限などの理解と応用力をみる問題である。

指針： (1) $\{a_n\}$ の漸化式から $\{b_n\}$ の漸化式を導くと

$$b_1 = 1 + p + q, \quad b_{n+1} = 5b_n - (4p+8)n + p - 4q + 14 \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

となるので、$p = -2,\ q = 3$ とすれば良い。

(2) (1) の結果を用いるならば、 $\{b_n\}$ は初項 2 公比 5 の等比数列なのでその一般項は $b_n = 2 \cdot 5^{n-1}$ であり、よって $a_n = 2 \cdot 5^{n-1} + 2n - 3$ となる。

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k = 2 \cdot \frac{5^n - 1}{5 - 1} + 2 \cdot \frac{n(n+1)}{2} - 3n = \frac{5^n - 1}{2} + n^2 - 2n$

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{2 \cdot 5^n} + \frac{n^2 - 2n}{5^n}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{5^n}\left(1 - \frac{2}{n} - \frac{1}{2n^2}\right) = 0$

を用いれば

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\log 5^n + \log\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2 \cdot 5^n} + \frac{n^2 - 2n}{5^n}\right)\right] = \log 5$$

が得られる。