令和４年度 一般試験（前期日程） 数学試験問題の出題意図と解答の指針

作題時における出題の意図と想定した解答の方針は以下の通りです。採点においては、これ以外の方針に基づく解答もこれと同様に等しく考慮されますし、最終結果に至るまでの途中の計算や推論も重視されます。

$\boxed{1}$ 出題意図：場合の数の数え方や確率及び対数についての基本的な理解と応用力をみる。

指針：p_n については n 回の反復試行において、n 回すべて奇数が出る事象の確率、q_n は n 回全てで 5 以外の数が出る事象の余事象の確率、r_n は（n 回とも奇数となる事象と、$n-1$ 回奇数が出て 1 回だけ 2 か 6 が出る事象の和事象）の余事象を考える。また、(3) については $\log_{10} 2, \log_{10} 3, \log_{10} 10 = 1$ を組み合わせて使うことを試みる。

(1) $$p_2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}, \qquad q_2 = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{11}{36},$$

$$r_2 = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 - {}_2\mathrm{C}_1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{5}{12}, \qquad r_3 = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^3 - {}_3\mathrm{C}_1 \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{8}$$

(2) $$p_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n, \quad q_n = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n, \quad r_n = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n - n \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

(3) $q_n \geqq 0.9999$ は上の (2) から $\left(\frac{5}{6}\right)^n \leqq 10^{-4}$ と同値な事が分かる。この対数を取って

$$-4 \geqq n \log_{10} \frac{5}{6} = n \log_{10} \frac{10}{2^2 \cdot 3} = n(1 - 2\log_{10} 2 - \log_{10} 3)$$

よって、　$n \geqq 50.5\cdots$ となるので求める最小の整数値は 51 となる。

$\boxed{2}$ 出題意図：ベクトルを用いて空間における直線や平面などを把握する力をみる。

指針：(1) では、D を直線 AB 上の点として表し、OD と AB の直交性を用いる。(2) においては、3 点 A.B, C を含む平面上の点として H の座標を表し、OH とこの平面上の 2 直線との直交条件を用いて H の座標を求める。(3) では　△ODH が直角三角形であることを利用する。

(1) 点 D は直線 AB 上にあるので実数 s を用いて、

$$\overrightarrow{\mathrm{OD}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + s\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \big(2(1-s), 2s, 0\big)$$

と表され、これを用いると AB と OD の直交条件は

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OD}} = -4(1-s) + 4s = 0$$

となる。これより、$s = 1/2$ 及び D の座標 $(1, 1, 0)$ が得られる。

(2) 点 H は 3 点 A, B, C を含む平面上にあるので実数 s, t を用いて、

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + s\overrightarrow{\mathrm{AB}} + t\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \big(2(1-s-t), 2s, \sqrt{2}t\big)$$

と表される。これを用いると AB, AC それぞれと OH との直交条件は

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OH}} = -4(1-s-t)+4s = 0,$$
$$\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OH}} = -4(1-s-t)+2t = 0$$

となり、$s=1/4, t=1/2$ 及び H の座標 $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ が得られる。

(3) $\overline{\mathrm{OD}}=\sqrt{2}$, $\overline{\mathrm{OH}}=1$, $\angle\mathrm{OHD}=\angle\mathrm{R}$ より、$\overline{\mathrm{HD}}=1$ となるので $\triangle\mathrm{ODH}=\frac{1}{2}$ が得られる。

3 出題意図：無限等比級数の収束条件や和の公式の理解と、三角関数や対数を用いた置換積分を通して微分積分の応用力をみる。

指針：(1) 無限級数の収束条件として公比の絶対値が 1 未満であることのほかに、初項が 0 になる自明な場合がある事に注意する。(2) 被積分関数を対数を使った置換積分をする部分と三角関数を使った置換積分をする部分の和に分ける。

(1) 収束する x の値の範囲: $-1 < x \leqq 1$ （公比 $-x^2$，初項 $x-1$ に注意）このときの級数の和は

$$S(x) = \frac{x-1}{1+x^2}$$

となる。

(2) $S(x) = \frac{x}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2}$ と分けて、第 1 項の積分は対数を用いて

$$\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx = \left[\frac{1}{2}\log(1+x^2)\right]_0^1 = \frac{\log 2}{2}$$

となり、第 2 項については $x=\tan\theta$ と置いて置換積分して

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx = \int_0^{\pi/4} \frac{1}{1+\tan^2\theta}\cdot\frac{d\theta}{\cos^2\theta} = \Big[\theta\Big]_0^{\pi/4} = \frac{\pi}{4}$$

を得る。合わせて

$$\int_0^1 S(x)\,dx = \frac{\log 2}{2} - \frac{\pi}{4}$$

となる。

4 出題意図:対数関数や分数関数の微分や、増減表を用いた極値の計算等を通して微分法の具体的運用能力をみる。また、極限の意味の理解についても問うた。

指針：(1) 対数法則を適応した後に微分すると計算が簡単になる。(2) 問題の関数の対数を取ったものの増減を調べる様にすると、計算が易しくなる。

(1) $\frac{d}{dx}\log f_n(x) = \frac{1}{n}\frac{d}{dx}\log(1+x^{2n}) = \frac{2x^{2n-1}}{1+x^{2n}}$

(2) $g_n(x) = \log\left(\frac{f_n(x)}{\sqrt{1+x^4}}\right)$ とおくと

$$\frac{d}{dx}g_n(x) = \frac{2x^{2n-1}}{1+x^{2n}} - \frac{2x^3}{1+x^4} = \frac{2x^3(x^{2n-4}-1)}{(1+x^4)(1+x^{2n})}$$

より $g_n(x)$ の増減表を書くと、

x		$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$g_n'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$g_n(x)$		$\searrow$	$\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2}\right)\log 2$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2}\right)\log 2$	$\nearrow$
$\frac{f_n(x)}{\sqrt{1+x^4}}$			$\frac{2^{1/n}}{\sqrt{2}}$		1		$\frac{2^{1/n}}{\sqrt{2}}$	

となる。よって、$g_n(x)$ 及び

$$e^{g_n(x)} = \frac{f_n(x)}{\sqrt{1+x^4}}$$

は $x = \pm 1$ で最小になり、求める最小値は $\dfrac{2^{1/n}}{\sqrt{2}}$ である。

(3) $$\lim_{n\to\infty} M_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{1/n}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$