令和５年度 一般試験（前期日程） 数学試験問題

$\boxed{1}$ 等差数列 $100, 97, 94, 91, \cdots\cdots$ の第 n 項を a_n とする。また，初項から第 n 項までの和を S_n とする。

(1) a_n を n を用いて表せ。

(2) S_n が最大となるときの n の値と，その n に対する S_n の値を求めよ。

(3) S_n が負となるような最小の自然数 n を求めよ。また，その n に対する a_n の値を求めよ。

$\boxed{2}$ $\triangle\mathrm{ABC}$ の内部に点 P があり，

$$\overrightarrow{\mathrm{PA}} + 2\overrightarrow{\mathrm{PB}} + 4\overrightarrow{\mathrm{PC}} = \overrightarrow{0}$$

が成り立っている。

(1) 直線 AP と辺 BC の交点を D とするとき，線分の長さの比 BD : DC と AP : PD を求めよ。

(2) 面積の比 $\triangle\mathrm{PAB} : \triangle\mathrm{ABC}$ を求めよ。

$\boxed{3}$ 次の問いに答えよ。

(1) 複素数平面上で，方程式 $\sqrt{7}|z-1| = |z+1|$ を満たす複素数 z 全体が表す図形を求めよ。

(2) $|z| = r$ と $\sqrt{7}|z-1| = |z+1|$ を同時に満たす複素数 z が２つ存在するような，正定数 r の値の範囲を求めよ。

(3) 複素数平面上で，(2) の２つの複素数の表す２点と原点 O を頂点とする三角形が正三角形であるとき，r の値を求めよ。

$\boxed{4}$ 座標平面上で，点 $\mathrm{A}\left(0, \dfrac{1}{2}\right)$ と曲線 $C : y = \log x$ 上の点 Q を結ぶ線分 AQ を $1:2$ の比に内分する点を P とする。ただし，対数は自然対数とする。

(1) 不定積分 $\displaystyle\int \log x\, dx$ を求めよ。

(2) 点 Q が曲線 C 上を動くとき，点 P の描く曲線を T とする。T の方程式を求めよ。

(3) (2) の曲線 T と曲線 C の交点の x 座標を求めよ。

(4) (2) の曲線 T と曲線 C および x 軸で囲まれた図形の面積を求めよ。

令和５年度 一般試験（前期日程） 数学試験問題の出題意図と解答の指針

作題時における出題の意図と想定した解答の方針は以下の通りです。採点においては，これ以外の方針に基づく解答もこれと同様に等しく考慮されますし，最終結果に至るまでの途中の計算や推論も重視されます。

$\boxed{1}$ 出題意図：等差数列の一般項と和の公式に関する基本的知識を簡単な応用を通して見る。

指針：一般項 a_n と和 S_n については，公式を用いる。S_n が最大になることと $a_n \geqq 0$ かつ $a_{n+1} \leqq 0$ であることが同値になることを用いると計算が楽になる。また，(3) での n の値は (2) での n の値の約 2 倍で a_n の値は $-a_1 = -100$ に近いことに気づくと結果に確信が持てる。

(1) 与えられた数列は，初項 100 公差 -3 の等差数列なのでその第 n 項は

$$a_n = 100 + (-3)(n-1) = 103 - 3n$$

となる。

(2) $a_n \geqq 0$ かつ $a_{n+1} \leqq 0$ となる自然数 n は $n = 34$ であるので，

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} (103 - 3k) = 103n - \frac{3}{2}n(n+1) = \frac{n(203-3n)}{2}$$

に $n = 34$ を代入して，$S_n = 1717$ を得る。

(3) $S_n < 0$ を解くと，$n < 0$ または $n > 203/3 = 67.6\cdots$ となるので，求める n と a_n の値は

$$n = 68, \quad a_n = -101$$

となる。

2 出題意図：ベクトルと内分点に関する知識の応用力を平面図形との関連から問う。

指針：(1) では点 D は直線 AP 上の点であると同時に BC の内分点であることを与式と関連付ける。(2) では高さが等しい三角形の面積の比は底辺の長さの比に等しいことを用いる。

(1) D は直線 AP 上にあるので λ を実数として

$$\overrightarrow{\mathrm{PD}} = \lambda\overrightarrow{\mathrm{AP}}$$

と表せる。これと与式

$$\overrightarrow{\mathrm{PA}} + 2\overrightarrow{\mathrm{PB}} + 4\overrightarrow{\mathrm{PC}} = \overrightarrow{0}$$

を用いると

$$\overrightarrow{\mathrm{PD}} = \lambda(2\overrightarrow{\mathrm{PB}} + 4\overrightarrow{\mathrm{PC}}) \tag{$*$}$$

が得られる。 D は BC 上にあるので $\lambda = 1/(2+4) = 1/6$。よって

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = 6\overrightarrow{\mathrm{PD}}$$

であり，AP : PD $= 6:1$ となる。また $(*)$ より D は BC を $2:1$ に内分する点なので BD : DC $= 2:1$ となる。

(2) 3 つの三角形 △PAB，△ABD，△ABC の面積の比を考える。△ABD と △ABC は A を共通の頂点として BD と BC をそれぞれ底辺とする三角形なのでその比は

$$\triangle\mathrm{ABD} : \triangle\mathrm{ABC} = \mathrm{BD} : \mathrm{BC} = 2:3(=14:21)$$

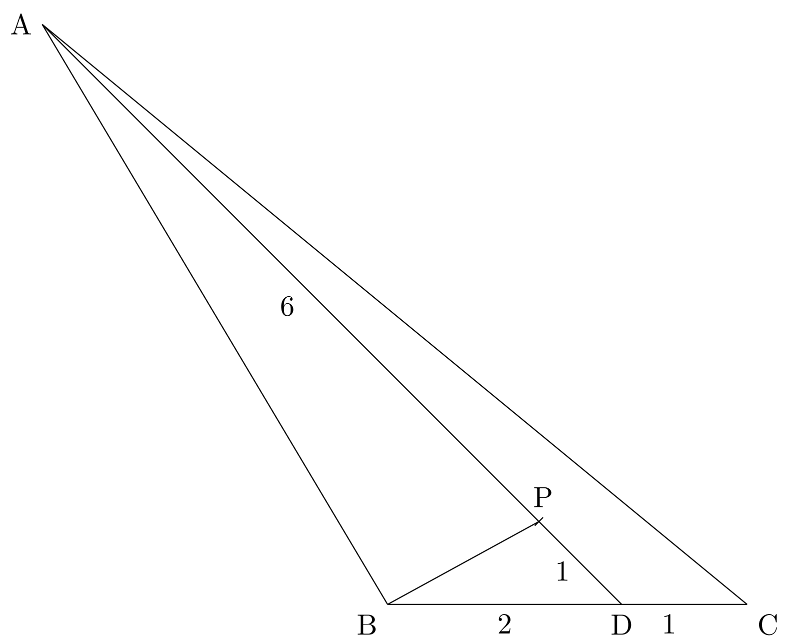
となる。同様にして

$$\triangle\mathrm{PAB} : \triangle\mathrm{ABD} = \mathrm{AP} : \mathrm{AD} = 6:7(=12:14)$$

となり、

$$\triangle\mathrm{PAB} : \triangle\mathrm{ABC} = 12:21 = 4:7$$

が得られる。



$\boxed{3}$ 出題意図：複素数に関する計算力と複素数平面上の点としての複素数の理解を平面図形の初等的性質との関連から問う。

指針：(1) 絶対値のままでは計算が進まないので，$|z|^2 = z\bar{z}$ を用いて四則演算がしやすい形にして考える。 (2) ２円が交わる条件を使う。このことは図を書けばすぐ分かるという立場でも良い。(3）では２つの複素数の偏角は $\pm\pi/6$ であることを用いると見通しが良くなる。

(1) 与式 $\sqrt{7}|z-1| = |z+1|$ の両辺を２乗して

$$7(z-1)(\bar{z}-1) = (z+1)(\bar{z}+1)$$

整理して，

$$z\bar{z} - \frac{4}{3}(z+\bar{z}) + \frac{16}{9} = \frac{7}{9} \qquad (**)$$

よって，$|z-4/3|^2 = 7/9$ となる。これは，中心 $4/3$，半径 $\sqrt{7}/3$ の円を表す。

(2) ２円が２点で交わる条件は，中心間の距離が２円の半径の差と和の間に入ることと，$|z| = r$ は中心 O 半径 r の円を表すことより

$$\frac{4-\sqrt{7}}{3} < r < \frac{4+\sqrt{7}}{3}$$

が導かれる。

(3) ２交点は互いに他の複素共役であるのでそれらを $z_0, \bar{z_0}$ と表すと，その絶対値が r であり、また $0, z_0, \bar{z_0}$ が正三角形をなすことより

$$z_0 = r\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}+i}{2}r$$

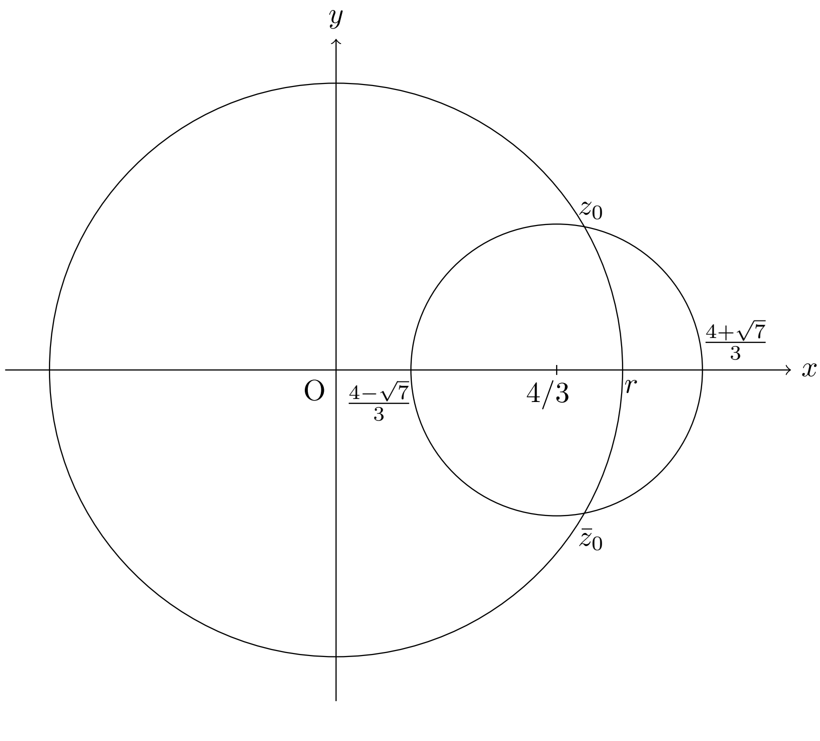
と書けるとして良い。そして $z = z_0$ は $(**)$ を満たすので

$$3r^2 - 4\sqrt{3}r + 3 = 0$$

となる。これを解いて

$$r = \sqrt{3} \text{ または } \frac{1}{\sqrt{3}}$$

が得られる。



4 出題意図：軌跡の基本と積分を用いた面積の計算法の理解を問う。

指針： (1) 部分積分法を用いる。(2) Q の座標が曲線 C の方程式を満たすことと，P の座標と Q の座標の関係から T の方程式を導く。(3) は C の方程式と T の方程式を連立させて解けば良い。(4) 曲線 T と x 軸および (3) で求めた交点を含む y 軸に平行な直線で囲まれた図形の面積と，曲線 C と x 軸および (3) の交点を含む y 軸に平行な直線で囲まれた図形の面積の差をとる。

(1) $\displaystyle\int \log x\,dx = x\log x - \int x(\log x)'\,dx = x\log x - x + C$

(2) 曲線 C 上の点 Q の座標は $(x, \log x)$ と書ける。ただし，$x > 0$ である。点 P の座標を (X, Y) と置くと，内分点の公式より

$$X = \frac{x}{3},\quad Y = \frac{1+\log x}{3}$$

となるので， $Y = \dfrac{1+\log 3X}{3}$ が成立し，X, Y を x, y に書き直して $y = \dfrac{1+\log 3x}{3}$ が曲線 T の方程式である。

(3) $y = \log x$ と $y = \dfrac{1+\log 3x}{3}$ を連立させて解けばよい。

$$\log x = \frac{1+\log 3x}{3}$$

を対数法則を用いて整理すると

$$3\log x = 1 + \log 3 + \log x$$
$$\therefore\quad \log x = \frac{\log 3e}{2} = \log\sqrt{3e}$$

となって $x = \sqrt{3e}$ が得られる。

(4) 曲線 T の x 軸との交点の x 座標は $1/3e$ となるので、 求める面積は

$$\int_{1/3e}^{\sqrt{3e}} \frac{1+\log 3x}{3}\,dx - \int_{1}^{\sqrt{3e}} \log x\,dx$$
$$= \Big[\frac{1+\log 3}{3}x + \frac{x\log x - x}{3}\Big]_{1/3e}^{\sqrt{3e}} - \big[x\log x - x\big]_1^{\sqrt{3e}} = \frac{2\sqrt{3e}}{3} + \frac{1}{9e} - 1$$

となる。