令和６年度 一般選抜（前期日程） 数学試験問題の出題意図と解答の指針

作題時における出題の意図と想定した解答の方針は以下の通りです。採点においては，これ以外の方針に基づく解答もこれと同様に等しく考慮されますし，最終結果に至るまでの途中の計算や推論も重視されます。

$\boxed{1}$ 出題意図：等差数列と等比数列の一般項と和の公式に関する基本的知識とその応用力を簡単な例を通して見る。

指針：(1) 一般項と和については，公式を用いる。(2) では (1) で求めた一般項の式を用いて、自然数 ℓ に対し $a_{2\ell+1} = b_n$ をみたす n を求める。(3) では (2) の結果から c_n が等比数列となることが分かるので等比数列の和の公式を使えば良い。或いは、$c_1, \cdots, c_4$ を具体的に求めて、それを足しても良い。

(1) $\{a_n\}$ は，初項 2 公比 2 の等比数列なので

$$a_n = 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n$$

であり、$\{b_n\}$ は，初項 5 公差 3 の等差数列なので

$$b_n = 5 + 3(n-1) = 3n + 2$$

となる。それらの和は、

$$\sum_{n=1}^{9} a_n = \sum_{n=1}^{9} 2^n = \frac{2(2^9-1)}{2-1} = 1022, \quad \sum_{n=1}^{9} b_n = \sum_{n=1}^{9} \bigl(3n+2\bigr) = 3\cdot\frac{9\cdot(9+1)}{2} + 2\cdot 9 = 153$$

となる。

(2) $a_{2\ell+1} = b_n$ つまり $2^{2\ell+1} = 3n + 2$ を n について解くと

$$n = \frac{2^{2\ell+1}-2}{3} = 2\cdot\frac{4^\ell - 1}{4-1} = 2\bigl(1 + 4 + 4^2 + \cdots + 4^{\ell-1}\bigr)$$

となり、n は自然数となるので $a_{2\ell+1}$ は数列 $\{b_n\}$ 中に現れることが分かる。

(3) $a_1 = 2$ は明らかに b_n 中に現れない。また、自然数 4^ℓ に対し $a_{2\ell} = b_n$ つまり $4^\ell = 3n + 2$ が自然数 n に対し成り立つとすると $4^\ell - 2 \equiv 0 \pmod 3$ となるが、これは

$$(3+1)^\ell - 2 \equiv 1 - 2 \not\equiv 0 \pmod 3$$

であり、矛盾が示せた。よって、$a_{2\ell}$ は $\{b_n\}$ 中に現れない。(2) の結果と合わせて $c_n = a_{2n+1} = 2\cdot 4^n$ となって

$$\sum_{n=1}^{4} c_n = 2\cdot 4\cdot\frac{4^4-1}{4-1} = 680$$

が得られる。

$\boxed{2}$ 出題意図： ベクトルの内積の性質とベクトルの大きさとの関係に関する知識とその応用力を問う。

指針：(1) 与えられた条件を内積で表し、それを整理する。(2) 問題のベクトルの大きさの 2 乗を最小にすることを考える。そのため、大きさの 2 乗を内積で表し、(1) の結果を用いて t の 2 次式の最小値を求める問題に帰着させる。

(1) 与えられた条件を内積を用いて表すと

$$(\overrightarrow{a}+2\overrightarrow{b})\cdot(\overrightarrow{a}+2\overrightarrow{b})=36\,, \tag{1}$$
$$(\overrightarrow{a}-2\overrightarrow{b})\cdot(\overrightarrow{a}-2\overrightarrow{b})=4\,, \tag{2}$$
$$(\overrightarrow{a}+2\overrightarrow{b})\cdot(\overrightarrow{a}-2\overrightarrow{b})=6\cdot 2\cdot\cos 120^\circ=-6 \tag{3}$$

整理して

$$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{a}+4\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}+4\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{b}=36\,, \tag{4}$$
$$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{a}-4\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}+4\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{b}=4\,, \tag{5}$$
$$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{a}-4\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{b}=-6\,, \tag{6}$$

となる。これを、$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{b}$ を未知数とする連立方程式として解くと、

$$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{a}=7,\quad \overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=4,\quad \overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{b}=\frac{13}{4}$$

が得られる。よって、答えは

$$|\overrightarrow{a}|=\sqrt{7},\qquad |\overrightarrow{b}|=\frac{\sqrt{13}}{2}$$

となる。

(2)

$$|t\overrightarrow{a}+2\overrightarrow{b}|^2=(t\overrightarrow{a}+2\overrightarrow{b})\cdot(t\overrightarrow{a}+2\overrightarrow{b}) \tag{7}$$
$$=t^2\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{a}+4t\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}+4\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{b} \tag{8}$$
$$=7t^2+16t+13=7\left(t+\frac{8}{7}\right)^2+\frac{27}{7} \tag{9}$$

よって、 $|t\overrightarrow{a}+2\overrightarrow{b}|$ は $t=8/7$ のとき最小値 27/7 をとる。

$\boxed{3}$ 出題意図：指数関数と三角関数に関する微分積分の基礎的な計算力と極限についての理解を問う。

指針：(1) 指数関数と三角関数の微分と、積と合成関数の微分法を用いて計算すれば良い。(2) 部分積分を繰り返し用いて積分しても良いが、不定積分は微分の逆演算であることを用いれば (1) の結果からすぐ分かる。(3) 指数関数と三角関数の無限遠での挙動を (2) の結果に用いる。

(1)

$$f'(x) = -ke^{-kx}\cos ax - ae^{-kx}\sin ax\,,$$

$$g(x) = -ke^{-kx}\sin ax + ae^{-kx}\cos ax$$

(2) (1) の結果を

$$f'(x) = -kf(x) - ag(x)\,, \tag{10}$$

$$g'(x) = -kg(x) + af(x) \tag{11}$$

と書いてみると、

$$af'(x) + kg'(x) = -(a^2+k^2)g(x)$$

となることが分かるので、

$$\int g(x)\,dx = -\frac{af(x)+kg(x)}{a^2+k^2} + C = -\frac{e^{-kx}(a\cos ax + k\sin ax)}{a^2+k^2} + C$$

が得られる。 ここで、C は積分定数である。

(3) (2) の結果を用いて、

$$\lim_{M\to\infty}\int_0^M g(x)\,dx = \lim_{M\to\infty}\left[\frac{e^{-kx}(a\cos ax + k\sin ax)}{a^2+k^2}\right]_0^M$$

$$= \lim_{M\to\infty}\left(-\frac{e^{-kM}(a\cos aM + k\sin aM)}{a^2+k^2} + \frac{a}{a^2+k^2}\right) = \frac{a}{a^2+k^2}$$

となる。ここで、$\lim_{x\to\infty} e^{-x} = 0$ と $|\cos x| \leqq 1, |\sin x| \leqq 1$ を用いた。

$\boxed{4}$ 出題意図：微分法の応用として、関数のグラフの接線を求めることや、関数の極大極小を用いて関数の概形を知る能力を問う。

指針: (1) 曲線 $y = g(x)$ の点 $(t, g(t))$ における接線の方程式は $y-g(t) = g'(t)(x-t)$ であること。また、関数 $f(t)$ の極値を与える t は、$f'(t) = \quad 0$ をみたすことなどを用いればよい。 (2) では、求める接線の本数は方程式 $f(t) = 5/4$ の解の個数に等しいことに気づけば (1) で求めた増減表から答えは読み取れる。

(1) 問題の接線の方程式は $y - (t^2-1)^2 = 4t(t^2-1)(x-t)$ となるので、これを整理して、

$$y = 4t(t^2-1)x - (t^2-1)(3t^2+1)\,.$$

この接線が y 軸と交わる点の座標をみれば

$$f(t) = -(t^2-1)(3t^2+1)$$

が得られる。微分して

$$f'(t) = 4t(1-3t^2)$$

となるので、 $f(t)$ の極値を与える t の候補は、$0, \pm 1/\sqrt{3}$ となる。増減表は、

t		$\cdots$	$-1/\sqrt{3}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$1/\sqrt{3}$	$\cdots$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(t)$		$\nearrow$	$4/3$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$4/3$	$\searrow$

となる。

(2) $1 < 5/4 < 4/3$ であることに注意すると $f(t) = 5/4$ をみたす t はいくつあるかは、(1) の増減表と $f(\pm 1) = 0$ となることから 4 つであることが分かる。よって、曲線 $y = (x^2-1)^2$ に点 $\left(0,\ \dfrac{5}{4}\right)$ からひける接線は 4 本ある。